Нахождение области неустойчивости Тьюринга в системах реакции-диффузии

Ревина С. В.

Южный федеральный университет, Южный математический институт

22 ноября 2023 г.

Постановка задачи

Рассматривается система уравнений реакции-диффузии:

$$u_t = \Delta u + f(u,v), \quad v_t = d\Delta v + g(u,v), \tag{1}$$

Здесь $d = \frac{D_2}{D_1}$ — коэффициент диффузии, x меняется в ограниченной области $\Omega \subset R^m$ при $m = 1,2,3$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ — оператор Лапласа. Предполагается, что при $m = 2;3$ граница области является достаточно гладкой $\partial\Omega \in C^2$, либо Ω представляет собой прямоугольный параллелепипед. заданы краевые условия

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Пусть система имеет пространственно-однородное стационарное решение (u_0, v_0). Будем интересоваться условиями, при которых имеет место диффузионная неустойчивость (неустойчивость по Тьюрингу) этого равновесия.
Неустойчивость Тьюринга пространственно-однородного решения (u_0, v_0) системы с диффузией характеризуется свойством устойчивости в отсутствие диффузии и неустойчивости при наличии диффузии.
Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences.—1952.—T. 237, No 641.—C. 37–72.

Определение 1

Равновесие (u_0, v_0) системы с диффузией называется неустойчивым по Тьюрингу, если выполняются два условия. Во-первых, собственные значения линеаризованной в окрестности состояния равновесия системы без диффузии лежат строго в левой полуплоскости комплексной плоскости. Во-вторых, существует собственное значение линеаризованной системы с диффузией, лежащее в правой полуплоскости.

Пусть слагаемые реакции $f(u,v)$, $g(u,v)$ зависят от двух параметров

Определение 2

Область на плоскости параметров системы, содержащая те параметры, при которых имеет место неустойчивость Тьюринга, а коэффициент диффузии d фиксирован, называется областью неустойчивости Тьюринга.

Определение 1

Равновесие (u_0, v_0) системы с диффузией называется неустойчивым по Тьюрингу, если выполняются два условия. Во-первых, собственные значения линеаризованной в окрестности состояния равновесия системы без диффузии лежат строго в левой полуплоскости комплексной плоскости. Во-вторых, существует собственное значение линеаризованной системы с диффузией, лежащее в правой полуплоскости.

Пусть слагаемые реакции $f(u,v)$, $g(u,v)$ зависят от двух параметров

Определение 2

Область на плоскости параметров системы, содержащая те параметры, при которых имеет место неустойчивость Тьюринга, а коэффициент диффузии d фиксирован, называется областью неустойчивости Тьюринга.

Определение 3

Критическим значением параметра d называется такое значение d_c, при котором спектр линеаризованной задачи с диффузией лежит строго в левой полуплоскости комплексной плоскости, за исключением собственного значения $\lambda(d_c) = 0$, причем пересечение мнимой оси происходит трансверсально:

$$\lambda'|_{d=d_c} \neq 0, \tag{3}$$

штрих означает дифференцирование по параметру d.

Целью настоящей работы является аналитическое описание области необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга в конечномерном пространстве параметров системы общего вида, а также классификация систем реакции-диффузии, связанная со структурой области неустойчиивости. Описание области неустойчивости Тьюринга дано в терминах собственных значений задачи Неймана для оператора Лапласа. Предложены замены переменных, которые позволяют дать упрощенное описание области диффузионной неустойчивости. В качестве примера указанный подход применяется для двух типов систем реакции-диффузии. Первый тип— системы Шнакенберга, "брюсселятор". Второй тип— системы Гирер-Мейнхардта, Беддингтона-деАнгелиса.

Через J обозначим матрицу Якоби

$$J = \left(\begin{array}{cc} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{array} \right) \Bigg|_{(u_0, v_0)} \tag{4}$$

Линеаризованная система в бездиффузионном приближении имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = Jy, \quad y \in R^2 \tag{5}$$

Линеаризованная система при наличии диффузии

$$\tilde{u}_t = \triangle \tilde{u} + f_u \tilde{u} + f_v \tilde{v}, \quad \tilde{v}_t = d \triangle \tilde{v} + g_u \tilde{u} + g_v \tilde{v}, \tag{6}$$

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга

Murray J. D. Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications.—Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.—С. 71-98.

$$h(\mu) = d\mu^2 - (df_u + g_v)\mu + det(J) \tag{7}$$

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга в общем случае:

$$f_u + g_v < 0;$$
$$f_u g_v - f_v g_u > 0;$$
$$df_u + g_v \geqslant 2\sqrt{d}\sqrt{det(J)}$$

Гипотезы. Тип 1

Необходимые ограничения на праметры системы

$$d \neq 1; \quad f_u \cdot g_v < 0.$$

$$(H_1) \quad f_u > 0.$$

Тогда $g_v < 0$ и $d > 1$. Пусть F - монотонно возрастающая функция

$$(H_2) \quad -g_v = F(\det(\mathrm{J})) \tag{8}$$

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга

$$\begin{aligned} & f_u < F(\det(\mathrm{J})), \\ & \det(\mathrm{J}) > 0, \\ & d \cdot f_u \geqslant F(\det(\mathrm{J})) + 2\sqrt{d}\sqrt{\det(\mathrm{J})} \end{aligned} \tag{9}$$

В новых переменных $(\det(\mathrm{J}), f_u)$. Кривая нулевого следа:

$$f_u = F(\det(\mathrm{J})), \tag{10}$$

Дискриминантная кривая:

$$(f_u)_0 = \frac{1}{d}F(\det(\mathrm{J})) + \frac{2}{\sqrt{d}}\sqrt{\det(\mathrm{J})} \tag{11}$$

Достаточные условия неустойчивости Тьюринга

Пусть ψ_k, μ_k - собственные функции и собственные значения

$$\Delta\psi_k + \mu_k\psi_k = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{12}$$

$$h(\mu_k) = d\mu_k^2 - (df_u + g_v)\mu_k + det(J) \tag{13}$$

Кривые достаточных условий:

$$(f_u)_k(det(\mathrm{J})) = \mu_k + \frac{det(\mathrm{J})}{d \cdot \mu_k} + \frac{1}{d}F(\mathrm{det}(\mathrm{J})). \tag{14}$$

Теорема 1 (О дискриминантной кривой)

Дискриминантная кривая $(f_u)_0(Det(\mathrm{J}))$
1) лежит не выше семейства $(f_u)_k$ в плоскости $(\mathrm{Det}(\mathrm{J}), f_u)$;
2) имеет с каждой кривой $(f_u)_k$ единственную общую точку с абсциссой

$$\mathrm{Det}(\mathrm{J}) = d\mu_k^2, \tag{15}$$

3) является огибающей семейства кривых $(f_u)_k$, $k \in N$.

Теорема 2 (О кривых достаточных условий)

Пусть $1 \leqslant k < m$. Тогда кривые $(f_u)_k(det(\mathrm{J}))$ и $(f_u)_m(det(\mathrm{J}))$ в полуплоскости $Det\mathrm{J} > 0$
1) имеют единственную общую точку с абсциссой

$$(\det(\mathrm{J}))_{k,m} = d\mu_k\mu_m, \tag{16}$$

и ординатой

$$(f_u)_{k,m} = \mu_k + \mu_m + \frac{1}{d}F(d\mu_k\mu_m), \tag{17}$$

2) Если $det(\mathrm{J}) < (\det(\mathrm{J}))_{k,m}$, то

$$(f_u)_k < (f_u)_m \tag{18}$$

и если $det(\mathrm{J}) > (\det(\mathrm{J}))_{k,m}$, то $(f_u)_k > (f_u)_m$.

Теорема 3 (О кривых достаточных условий)

Кривые $(f_u)_k(det(\mathrm{J}))$ и $(f_u)_{k+1}(det(\mathrm{J}))$ в полуплоскости $Det\mathrm{J} > 0$
1) имеют единственную общую точку с абсциссой

$$(\det(\mathrm{J}))_{k,k+1} = d\mu_k\mu_{k+1}, \tag{19}$$

и ординатой

$$\Gamma_k = \mu_k + \mu_{k+1} + \frac{1}{d}F(d\mu_k\mu_{k+1}), \tag{20}$$

2) Если $det(\mathrm{J}) \in [(\det(\mathrm{J}))_{k-1,k}; (\det(\mathrm{J}))_{k,k+1}]$, $k \in N$, то

$$\Gamma_{k-1} \leqslant (f_u)_k(Det(\mathrm{J})) \leqslant \Gamma_k. \tag{21}$$

3) Если $det(\mathrm{J}) \in [(\det(\mathrm{J}))_{k-1,k}; (\det(\mathrm{J}))_{k,k+1}]$, $k \in N$,

$$(f_u)_k(det(\mathrm{J})) = \min_m (f_u)_m(det(\mathrm{J}))). \tag{22}$$

Определение 5

Обозначим через $Z_1(detJ)$ объединение кривых $(f_u)_k(det(\mathrm{J}))$ при $det(\mathrm{J}) \in [(\det(\mathrm{J}))_{k-1,k}; (\det(\mathrm{J}))_{k,k+1}]$, $k \geqslant 1$

$$Z_1(detJ) = \bigcup_{k\geqslant 1} \{(f_u)_k(detJ), detJ \in [(detJ)_{k-1,k}, (detJ)_{k,k+1}]\}, \tag{23}$$

Теорема 4 (Область диффузионной неутойчивости)

Пусть выполняется следующее неравенство

$$\mu_1 + \mu_2 < \frac{d-1}{d} F(d\mu_1\mu_2). \tag{24}$$

Тогда область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга задается неравенствами

$$detJ > 0; \quad f_u < F(detJ); \quad f_u \geqslant Z_1(detJ), \tag{25}$$

где Z_1 определена в (26).

Пример 1: система Шнакенберга

Revina S.V., Lysenko S.A. Sufficient Turing instability conditions for the Schnakenberg system // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. № 3. С. 424-442. DOI: 10.35634/vm210306

Система Шнакенберга:

$$f(u,v) = u^2 v - u + a \quad g(u,v) = -u^2 v + b.$$

$$(u_0, v_0) = \left(a + b, \quad \frac{b}{(a+b)^2} \right).$$

$$Y = b - a; \quad X = a + b.$$

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга

$$f_u = \frac{Y}{X}; \quad -g_v = detJ = X^2.$$

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга в плоскости (X, Y):

$$X > 0; \quad Y < X^3; \quad Y \geq \frac{1}{d}X^3 + \frac{2}{\sqrt{d}}X^2.$$

Кривая нулевого следа и дискриминантная кривая

$$Y = X^3, \quad Y_0 = \frac{1}{d}X^3 + \frac{2}{\sqrt{d}}X^2$$

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга в плоскости $(detJ, f_u)$:

$$f_u < detJ; \quad f_u \geq \frac{1}{d} detJ + \frac{2}{\sqrt{d}} \sqrt{detJ}.$$

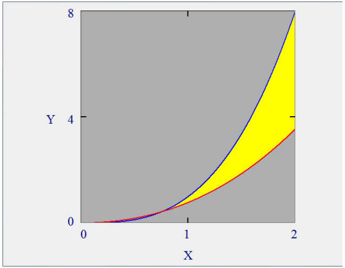
Кривая нулевого следа, дискриминантная кривая и кривая досточных условий

$$f_u = detJ, \quad (f_u)_0 = \frac{1}{d} detJ + \frac{2}{\sqrt{d}} \sqrt{detJ}.$$

$$(f_u)_k(detJ) = \frac{\mu_k + 1}{\mu_k \cdot d} \cdot detJ + \mu_k$$

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга



Достаточные условия неустойчивости Тьюринга

$$Z_1(detJ) = \bigcup_{k\geqslant 1}\{(f_u)_k(detJ), detJ \in [(detJ)_{k-1,k}, (detJ)_{k,k+1}]\}, \tag{26}$$

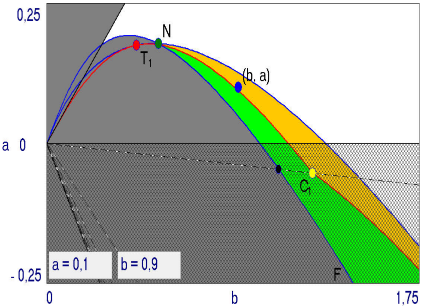
Пусть выполняется неравенство

$$d > 1 + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}, \tag{27}$$

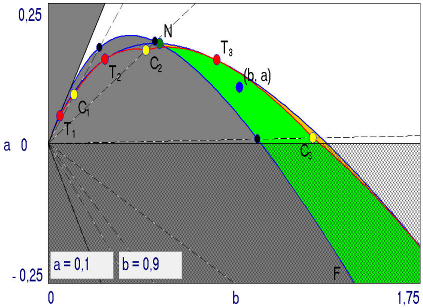
Тогда область необходимых и достаточных условий имеет вид

$$detJ > 0; \quad f_u < detJ; \quad f_u \geqslant Z_1(detJ), \tag{28}$$

Достаточные условия неустойчивости Тьюринга



Достаточные условия неустойчивости Тьюринга



Пример 2: Брюсселятор

$$f(u,v) = A - (B+1)u + u^2v, \quad g(u,v) = Bu - u^2v. \tag{29}$$

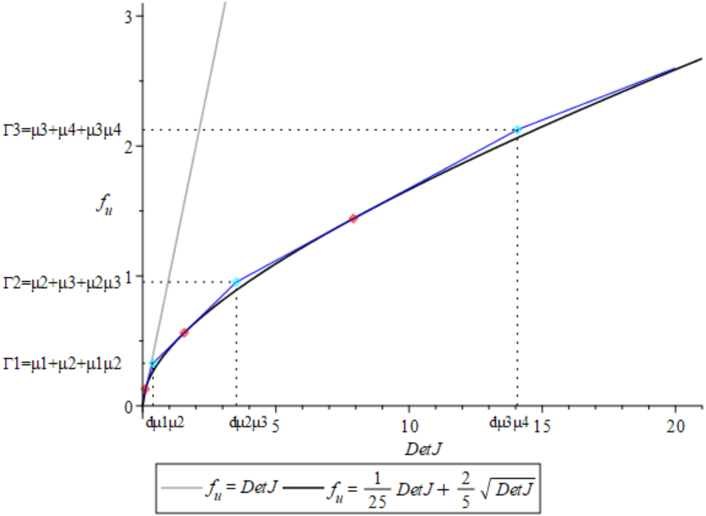
Выполнение гипотез:

$$f_u = B - 1; \quad -g_v = detJ = A^2. \tag{30}$$

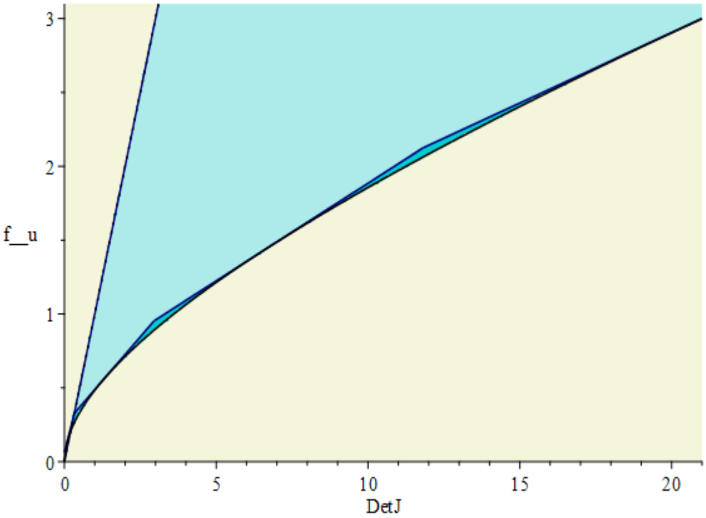
Положение равновесия

$$(u_0, v_0) = \left(A, \quad \frac{B}{A}\right). \tag{31}$$

Граница области необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга в переменных $(Det(J), f_u)$ при $d = 25$, $x \in [0, 4\pi]$.



Область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга в переменных $(Det(J), f_u)$ при $d = 25$, $x \in [0, 4\pi]$.



Достаточные условия неустойчивости Тьюринга в переменных (A, B)

Вид многочлена $h(\mu)$ в переменных (A, B):

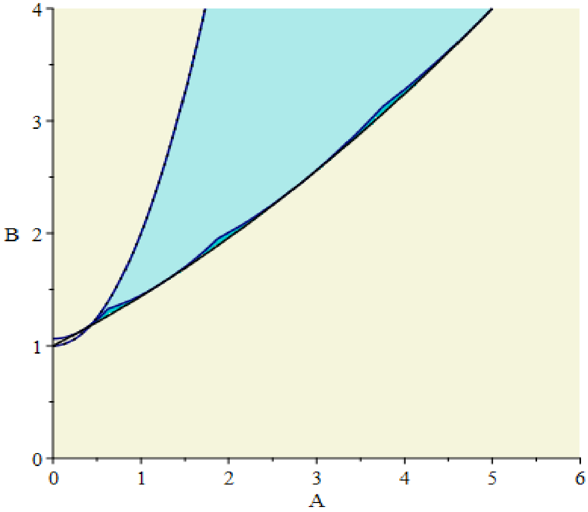
$$h(\mu_k) = d\mu_k^2 - (d(B-1) - A^2)\mu_k + A^2 \tag{32}$$

Чтобы получить кривые достаточных условий, выразим B из $h(\mu_k)$ через A:

$$B_k(A) = \mu_k + \frac{1}{d\mu_k}A^2 + \frac{1}{d}A^2 + 1 \tag{33}$$

В данном случае получается семейство парабол.

Область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга в переменных (A, B) при $d = 25$, $x \in (0, 4\pi)$.



Гипотезы. Тип 2

Необходимые ограничения на праметры системы

$$d \neq 1; \quad f_u \cdot g_v < 0.$$

$$(H_1) \quad f_u > 0.$$

Тогда $g_v < 0$ и $d > 1$.

$$(H_2) \quad g_v = -1 \tag{34}$$

Пример 3: система Гирера-Мейнхардта

$$f(u,v) = a - bu + \frac{u^2}{v} \quad g(u,v) = u^2 - v. \tag{35}$$

Положение равновесия

$$(u_0, v_0) = \left(\frac{a+1}{b}, \quad \frac{(a+1)^2}{b^2} \right) = \left(\frac{A}{B}, \quad \frac{A^2}{B^2} \right). \tag{36}$$

Кривые достаточных условий и дискриминантная

$$A_k(B) = \frac{d\mu_k}{d\mu_k + 1} \cdot \frac{2B}{B + \mu_k}; \quad A_0 = \frac{2dB}{(\sqrt{d}\sqrt{B} + 1)^2} \tag{37}$$

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга

$$f_u = \frac{B(2-A)}{A} > 0; \quad -g_v = 1. \tag{38}$$

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга для системы Гирера-Мейнхардта:

$$A < \frac{2B}{B+1};$$
$$B > 0;$$
$$A \leqslant \frac{2dB}{(\sqrt{d}\sqrt{B}+1)^2}$$

Свойства кривых A_k

Кривые $A_k(B)$ обладают следующими свойствами:
1) кривые $A_k(B)$ и $A_m(B)$ на полуплоскости $B > 0$ имеют единственную точку пересечения $(B_{k,m}, A_{k,m})$

$$B_{k,m} = \mu_k \mu_m d; \quad A_{k,m} = \gamma_{k,m} B_{k,m} \tag{39}$$

где

$$\gamma_{k,m} = \frac{2d}{(d\mu_m + 1)(d\mu_k + 1)} \tag{40}$$

2) При $B \leqslant B_{m,k}$ и $m < k$ кривая $A_k(X)$ расположена не выше кривой $A_m(X)$:

$$A_k(X) \leqslant A_m(X) \tag{41}$$

При $B > B_{k,m}$ кривая $A_k(B)$ расположена выше кривой $A_m(B)$.

1) кривые $A_k(B)$ и $A_{k+1}(B)$ на полуплоскости $B > 0$ имеют единственную точку пересечения $(B_{k,k+1}, A_{k,k+1})$

$$B_{k,k+1} = \mu_k \mu_{k+1} d; \quad A_{k,k+1} = \gamma_k X_{k,k+1} \tag{42}$$

где

$$\gamma_k = \frac{2d}{(d\mu_k + 1)(d\mu_{k+1} + 1)} \tag{43}$$

2) Общие точки $(B_{k,k+1}, A_{k,k+1})$ кривых $A_k(B)$ и $A_{k+1}(B)$ расположены на прямой с угловым коэффициентом γ_k.

3) На промежутке $B \in [B_{k-1,k}, B_{k,k+1}]$ кривая $A_k(B)$ расположена в секторе, ограниченном прямыми с угловыми коэффициентами γ_{k-1} и γ_k:

$$\gamma_{k-1} B \leqslant A_k(B) \leqslant \gamma_k B. \tag{44}$$

4) На промежутке $B \in [B_{k-1,k}, B_{k,k+1}]$ кривая $A_k(B)$ расположена выше всех остальных кривых $A_m(B)$, $m \neq k$

$$A_k(B) = \max_m A_m(B) \tag{45}$$

Критический коэффициент диффузии

Через $A_s(B)$ обозначим объединение фрагментов кривых $A_k(B)$ при $B \in [B_{k-1,k}, B_{k,k+1}]$:

$$A_s(B) = \bigcup \{A_k(B), B \in [B_{k-1,k}, B_{k,k+1}]\} \tag{46}$$

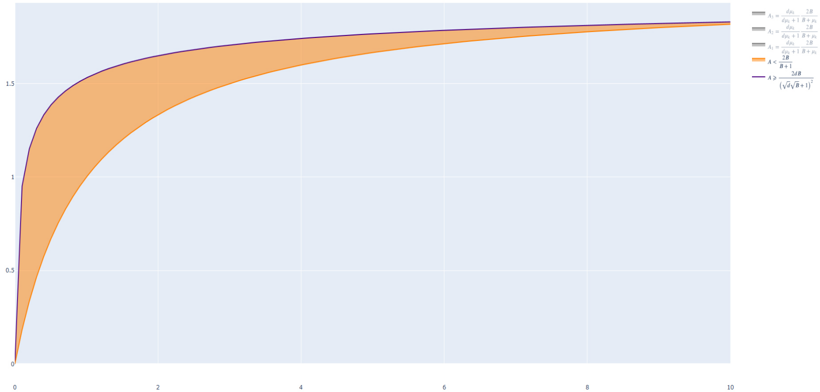
1) Область неустойчивости Тьюринга на плоскости (B, A) задается неравенствами

$$B > 0; \quad A > \frac{2B}{B+1}; \quad A \leqslant A_s(B). \tag{47}$$

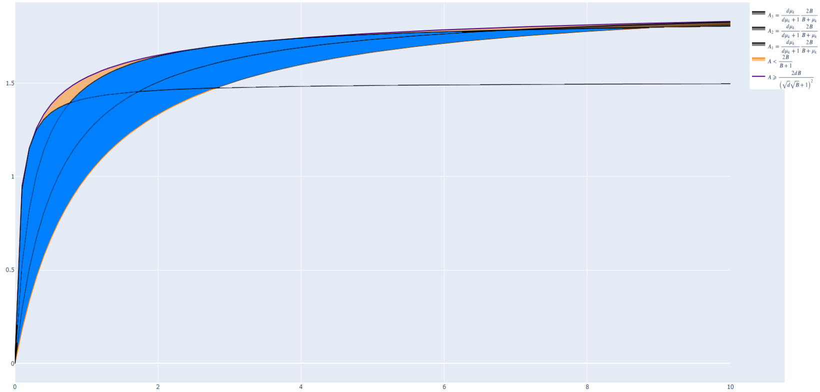
2) Критическое значение коэффициента диффузии для $B \in [B_{k-1,k}, B_{k,k+1}]$, $A = A_k$ определяется равенством

$$d_c = \frac{A(B+\mu_k)}{\mu_k(B(2-A) - \mu_k A)} \tag{48}$$

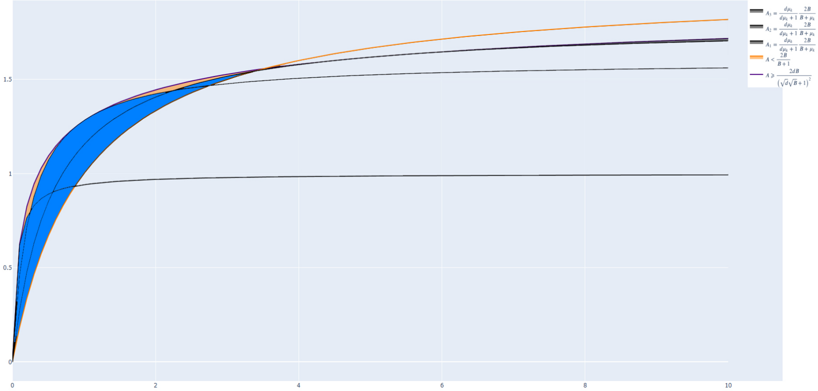
Область необходимых условий неустойчивости Тьюринга



Область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга



Область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга



Пример 4: система Беддингтона-деАнгелиса

$$f(u,v) = u(1-u) - \frac{Auv}{u+h} \quad g(u,v) = \left(1 - \frac{v}{u+h}\right)v. \tag{49}$$

Положение равновесия

$$(u_0, v_0) = (1-A, \quad 1-A+h)\,. \tag{50}$$

Выполнение гипотез

$$f_u = \frac{u_0}{v_0}(1-u_0) - u_0 > 0; \quad -g_v = 1. \tag{51}$$

Пример 4: система Беддингтона-деАнгелиса

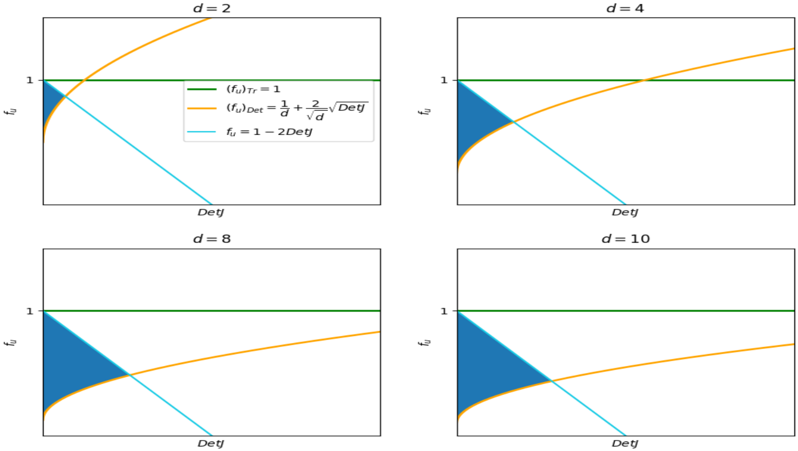
Кривые необходимых условий

$$(f_u)_0 = \frac{1}{d} + \frac{1}{\sqrt{d}}\sqrt{detJ} \tag{52}$$

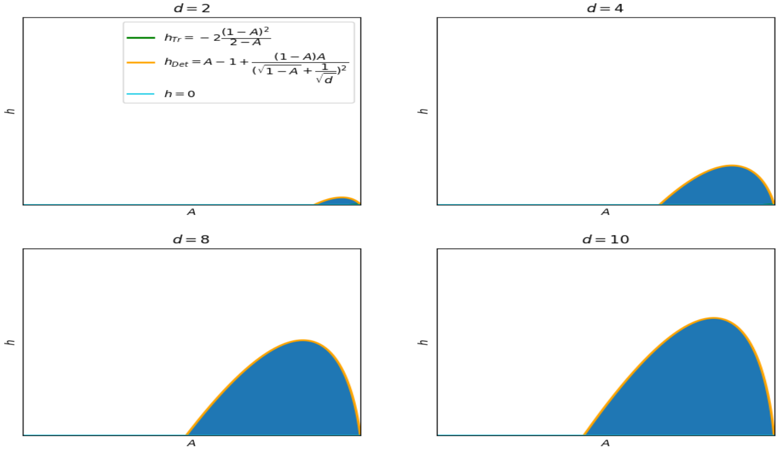
Кривые достаточных условий

$$(f_u)_k = \mu_k + \frac{1}{d} + \frac{1}{d\mu_k} detJ \tag{53}$$

Область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга



Область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга



Однопараметрическая система Гирера-Мейнхардта

Рассматривается система уравнений реакции-диффузии:

$$u_t = \Delta u - u + \frac{u^2}{v}, \quad \tau v_t = d\Delta v - v + u^2 \tag{54}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{55}$$

Здесь $u = u(x,t)$ — активатор, $v = v(x,t)$ — ингибитор, $d > 0$ — коэффициент диффузии, τ — параметр релаксации, $x \in \Omega \subset R^m$ при $m = 1, 2, 3$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ — оператор Лапласа. На границе области заданы краевые условия Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{56}$$

Вторичные стационарные решения

Утверждение 7. Пусть k — критическое волновое число; в одномерном случае длина отрезка ℓ заключена в промежутке $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$, в двумерном случае при $m \neq 0$, $n = 0$ сторона прямоугольника a принадлежит промежутку $a \in (a_{k-1,k}, a_{k,k+1})$. Тогда при $\tau \in (0; 0,2059)$ происходит мягкая потеря устойчивости положения равновесия $(1;1)$ нелинейной системы и при малых $d > d_k$ возникают устойчивые вторичные пространственно-неоднородные решения

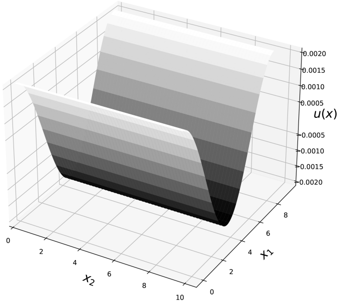
$$(u(x); v(x)) = \pm(d - d_k)^{1/2} \beta_1 \boldsymbol{C}_k \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x_1\right) + (d - d_k)\left(\boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{z}(x)\right) + O((d - d_k)^{3/2}, \tag{57}$$

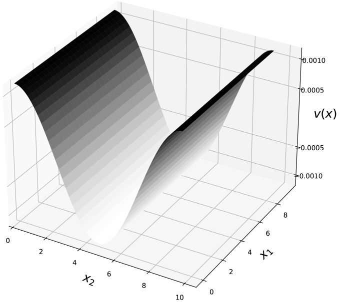
где $\boldsymbol{C}_k$ находятся явно,

$$\boldsymbol{z}_0 = (C_1^0; C_2^0); \quad \boldsymbol{z}(x) = (C_1^1; C_2^1)\cos\left(\frac{2\pi k}{\ell} x_1\right), \tag{58}$$

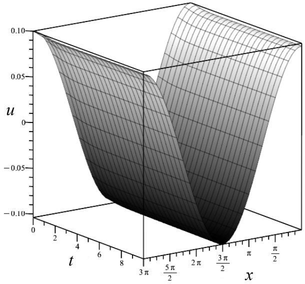
коэффициенты C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1 найдены явно.

Вторичные стационарные решения

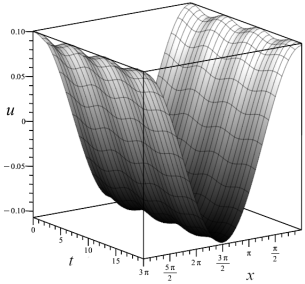




Мягкая потеря устойчивости



Жесткая потеря устойчивости



Заключение

Область неустойчивости Тьюринга

Для системы двух уравнений реакции-диффузии общего вида предложен способ аналитического описания области необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга на плоскости параметров при фиксированном коэффициенте диффузии. Показано, что область необходимых условий неустойчивости Тьюринга ограничена кривой нулевого следа, дискриминантной кривой и геометрическим местом точек, для которых определитель матрицы Якоби обращается в ноль.

Заключение

Критический коэффициент диффузии.
Найдено явное выражение критического коэффициента диффузии, когда система рассматривается в произвольной ограниченной области. Показано, что критический коэффициент диффузии зависит от собственных значений оператора Лапласа в данной области. Установлена зависимость критического коэффициента диффузии от характерного размера области в случае отрезка и прямоугольника.

Тьюринговы структуры.
Методом Ляпунова-Шмидта явно найдены несколько первых членов рядов по степеням надкритичности, когда коэффициент диффузии находится в окрестности критического значения. Получены достаточные условия мягкой потери устойчивости.

Литература

- Revina S.V., Lysenko S.A. Sufficient Turing instability conditions for the Schnakenberg system // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. № 3. С. 424-442. DOI: 10.35634/vm210306
- Ревина С.В. Область диффузионной неустойчивости для систем параболических уравнений // Владикавк. мат. журн. 2022. Т. 24, вып. 4. С. 117–126. DOI: 10.46698/d6373-9335-7338-n
- Ревина С. В., Рябов А. С. Неустойчивость Тьюринга в однопараметрической системе Гирера–Мейнхардта // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 501–522. DOI: 10.18500/0869-6632-003053. EDN: WZPQWD

Литература

- Revina S.V., Lysenko S.A. Sufficient Turing instability conditions for the Schnakenberg system // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. № 3. С. 424-442. DOI: 10.35634/vm210306
- Ревина С.В. Область диффузионной неустойчивости для систем параболических уравнений // Владикавк. мат. журн. 2022. Т. 24, вып. 4. С. 117–126. DOI: 10.46698/d6373-9335-7338-n
- Ревина С. В., Рябов А. С. Неустойчивость Тьюринга в однопараметрической системе Гирера–Мейнхардта // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 501–522. DOI: 10.18500/0869-6632-003053. EDN: WZPQWD

Литература

- Revina S.V., Lysenko S.A. Sufficient Turing instability conditions for the Schnakenberg system // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. № 3. С. 424-442. DOI: 10.35634/vm210306
- Ревина С.В. Область диффузионной неустойчивости для систем параболических уравнений // Владикавк. мат. журн. 2022. Т. 24, вып. 4. С. 117–126. DOI: 10.46698/d6373-9335-7338-n
- Ревина С. В., Рябов А. С. Неустойчивость Тьюринга в однопараметрической системе Гирера–Мейнхардта // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 501–522. DOI: 10.18500/0869-6632-003053. EDN: WZPQWD